



TITLE:

群多様体に附随するBialgebraの構造について (Derivations及びAlgebraのCohomology研究会報告集)

AUTHOR(S):

柳原, 弘志

CITATION:

柳原, 弘志. 群多様体に附随するBialgebraの構造について (Derivations及びAlgebraのCohomology研究会報告集). 数理解析研究所講究録 1970, 94: 93-102

ISSUE DATE:

1970-08

URL:

<http://hdl.handle.net/2433/108156>

RIGHT:

群多様体に附随する

bialgebraの構造について

広島大 理 柳原 弘 志

§1 local semi-derivations

k を標数 $p > 0$ の体とし, $(\mathcal{O}, \mathcal{M})$ を k を含む 局所環で, $\mathcal{O}/\mathcal{M} \cong k$ とする. D を \mathcal{O} から k への k -linear map で, 次の条件をみたすとき, height r の local semi-derivation という.

$$i) \quad D(fg) = D(f)g(0) + f(0)D(g), \quad f \in \mathcal{O}, g \in \mathcal{O}^{pr}$$

但し $f(0), g(0)$ は k の元で $f - f(0) \in \mathcal{M}, g - g(0) \in \mathcal{M}$ となるものである. 更に

$$ii) \quad D(\mathcal{O}^{pr}) = 0$$

をみたすとき, D は special semi-derivation of ht. r とよぶ.

$\mathcal{L}_r(\mathcal{O})$ で ht. r の semi-derivation 全体のなす k 上のベクトル空間, $\mathcal{S}_r(\mathcal{O})$ で ht. r の special semi-derivation 全体のなす $\mathcal{L}_r(\mathcal{O})$ の部分空間をあらわすと.

$$G_r(\mathcal{O}) \subset D_r(\mathcal{O}) \subset G_{r+1}(\mathcal{O})$$

が容易に分る。

Proposition 1. \mathcal{O} が 正則局所環で rank が n なら

$$\dim_k G_r(\mathcal{O}) = p^{nr} - 1, \quad \dim_k D_r(\mathcal{O}) = p^{nr} - 1 + n.$$

§2. 代数函数体の semi-derivations

k を標数 $p > 0$ の体で K を k 上有限生成かつ分離的な拡大体とし, $K_r = k K^{p^r}$ とおく。このとき, K の k -linear endomorphism D が次の条件をみたすとき, ht. r の K の k 上の semi-derivation という。

$$i) \quad x \in K_r \text{ ならば } D(x) \in K_r$$

$$ii) \quad D(xy) = D(x)y + xD(y), \quad x \in K, y \in K_r.$$

更に D が

$$iii) \quad D(K_r) = 0$$

をみたせば, special という。

$D_r(K/k)$ で ht. r の K/k の semi-derivation 全体の集合をあらわせば, これは K_r 上のベクトル空間になる。同様に $G_r(K/k)$ で ht. r の K/k の special semi-derivation 全体をあらわせば, $G_r(K/k)$ は K 上のベクトル空間になる。

そして, $G_r(K/k) \subset \mathcal{O}_r(K/k) \subset G_{r+1}(K/k)$

が 成り立つ.

$\{x_1, \dots, x_n\}$ を K/k の分離超越基とすると,

$$\begin{cases} D_{e_1 \dots e_n}^{(r)}(x_1^{e_1} \dots x_n^{e_n}) = 1 \\ D_{e'_1 \dots e'_n}^{(r)}(x_1^{e'_1} \dots x_n^{e'_n}) = 0 \end{cases}, \quad (e_1, \dots, e_n) \neq (e'_1, \dots, e'_n)$$

$$(\text{但し } 0 \leq e_i, e'_j < p^r, \sum_{i=1}^n e_i > 0, \sum_{j=1}^n e'_j > 0)$$

をみたす $D_{e_1 \dots e_n}^{(r)}$ が $G(K/k)$ に存在し, これらが,

$G(K/k)$ の K 上の基になることが分る. 特に, $\dim_K G(K/k)$

$= p^{nr} - 1$ となる. (但し $n = \text{tr. deg}_k K$). 更に,

$$\mathcal{O}_r(K/k) = G_r(K/k) \oplus \sum_{i=1}^n K_r E_{i,r} \quad \text{となる } K_r \text{ 上 1 次独立な}$$

$\mathcal{O}_r(K/k)$ の元 $E_{1,r}, \dots, E_{n,r}$ が存在することが分る.

次に k を完全体, X を k で定義された代数多様体で K を X の k 上の有理函数体とする. $x \in X$ に対し $\mathcal{O}_{x,X}$ を X の x における stalk とし K の部分環と同一視する. このとき $D \in \mathcal{O}_r(K/k)$ が $D(\mathcal{O}_{x,X}) \subset \mathcal{O}_{x,X}$ をみたせば, D は x で regular であるという. 特に x が k -有理的で, X の単純点であるとする. $\{t_1, \dots, t_n\}$ を $\mathcal{O}_{x,X}$ の正則パラメータ系とすると 次のことが分る.

Proposition 2. $D \in \mathcal{O}_r(K/k)$ (resp. $D \in G_r(K/k)$)

が x が regular であるための必要十分条件は $D(t_1^{e_1} \dots t_n^{e_n})$ と $D(t_j^{p^r})$ (resp. $D(t_1^{e_1} \dots t_n^{e_n})$) が $\theta_{x,x}$ に含まれることである。但し $0 \leq e_i < p^r$.

$\mathcal{D}_r(X, x)$ で x が regular な $\mathcal{D}_r(K/k)$ の元全体の集合をあらわすと, $\mathcal{D}_r(X, x)$ は $\theta^{(n)}$ -module になる。但し, $\theta^{(n)} = \theta_{x,x} \cap K^r$. 同様に $\mathcal{G}_r(X, x)$ を $\mathcal{G}_r(K/k)$ の x が regular なもの全体とすると, $\theta_{x,x}$ -module になることが分る。そして, Prop. 2 より 次の結果を得る。

Proposition 3. $X, x, \{t_1, \dots, t_n\}$ を Prop. 2 と同様とすると, $\mathcal{G}_r(X, x)$ は rank p^{nr-1} の free $\theta_{x,x}$ -module, $\mathcal{D}_r(X, x) = \mathcal{G}_r(X, x) \oplus \sum_{i=1}^n \theta^{(n)} E_{i,r}$ となる。

次に $\theta_{x,x}$ の local semi-derivation と $\mathcal{D}_r(X, x)$ の関係を考える。 $D \in \mathcal{D}_r(X, x)$ のとき, $f \in \theta_{x,x}$ に対して

$$D_x(f) \equiv D(f)(x)$$

とおくと, これは k の元で D_x は $\mathcal{D}_r(\theta_{x,x})$ に属することから容易に分る。 D_x を D の x における local component という。明らかに, $D \in \mathcal{G}_r(X, x)$ なら $D_x \in \mathcal{G}_r(\theta_{x,x})$ になる。 π_x で, この $\mathcal{D}_r(X, x)$ から $\mathcal{D}_r(\theta_{x,x})$ への対応 $D \rightarrow D_x$ を

あらわすことにする。

Proposition 4. $\pi_x: G_r(X, x) \rightarrow G_r(\theta_{x,X})$ は surjection で, kernel は, $\mathcal{M}_{x,X} G_r(X, x)$ となる。

但し, $\mathcal{M}_{x,X}$ は $\theta_{x,X}$ の極大イデアルである。

X, Y を k で定義された代数多様体で, α を $X \rightarrow Y$ の k -morphism, x を X 上の k -有理点とする。 $y = \alpha(x)$ とすると, $\alpha^*: \theta_{y,Y} \rightarrow \theta_{x,X}$ なる k -準同型を得る。

$D \in \mathcal{D}_r(\theta_{x,X})$ とするとき, 容易に分るように, $D \circ \alpha^*$ は $\mathcal{D}_r(\theta_{y,Y})$ の元である。このとき, $\alpha_*(D) = D \circ \alpha^*$ と定義する。 α_* を tangential map とよぶ。

§3. 群多様体の不変 semi-derivations

以後, k は標数 $p > 0$ の代数的閉体とする。

G を k で定義された群多様体, $K = k(G)$ を G の k 上の有理函数体とする。 a を G の k -有理点とし, L_a を $x \rightarrow ax$ なる G から G への k -morphism とする。このとき, L_a により, $K = k(G)$ の k -自己同型 L_a^* が引きおこされる。

K/k の semi-derivation D に対して, $D L_a^* = L_a^* D$

なる関係が、 G のすべての k -有理点に対してなりたつとき、 D を左不変な semi-derivation とよぶ。これは 次の条件と同値である。

i) D は G の各点で regular

ii) a, b を G の k -有理点とすると、 $D_{ab} = (L_a)_*(D_b)$ 。

更に、 G がアーベル多様体であれば、i) から ii) は従う。

$\mathcal{D}(G)$ を G の左不変な semi-derivation 全体の集合をあらわすことにすると、 $\mathcal{D}_r(G) = \mathcal{D}(G) \cap \mathcal{D}_r(k(G)/k)$,
 $\mathcal{D}_r(G) = \mathcal{D}(G) \cap \mathcal{D}_r(k(G)/k)$ とおく。次のことが分る。

(i) e を G の単位元とすると、 $\pi_e: \mathcal{D}_r(G) \rightarrow \mathcal{D}_r(\theta_{e,G})$ は k -同型、特に、 $\mathcal{D}_r(G)$ は k 上 $p^{nr}-1$ 次元の k 上のベクトル空間となる。(但し、 $n = \dim. G$)。又、 $\{t_1, \dots, t_n\}$ を $\theta_{e,G}$ の正則パラメーター系とすると、

$$\begin{cases} D_{e_1, \dots, e_n}(t_1^{e_1}, \dots, t_n^{e_n}) = 1 \\ D_{e_1, \dots, e_n}(t_1^{e'_1}, \dots, t_n^{e'_n}) = 0 \text{ for } (e_1, \dots, e_n) \neq (e'_1, \dots, e'_n) \end{cases}$$

となる $\mathcal{D}_r(\theta_{e,G})$ の元 D_{e_1, \dots, e_n} が存在するか、($0 \leq e_i < p^n$)
 これに対して、 $I_{e_1, \dots, e_n} \in \mathcal{D}_r(G)$ を

$$\pi_e(I_{e_1, \dots, e_n}) = D_{e_1, \dots, e_n}$$

となるようにとる。

(R) $H_r(G) = k \oplus \gamma_r(G)$ は k 上の Hopf algebra の構造をもつ。 algebra としての構造は, $\text{Hom}_k(K, K)$ の sub-algebra としての構造であり, coalgebra としての構造は

$$\Delta(I_{e_1} \dots e_n) = \sum_{(e') + (e'') = (e)} I_{e_1' \dots e_n'} \otimes I_{e_1'' \dots e_n''}$$

(但し和は $e_i = e_i' + e_i''$ ($i=1, 2, \dots, n$) をみたすもの全体にわたるものとする。又 $I_{\circ \dots \circ} = \text{identity}$.)

によって定義される。antipode は $x \rightarrow x^{-1}$ なる $G \rightarrow G$ の k -morphism から自然に与えられる。この Hopf algebra は cocommutative である。又, $H(G) = \bigcup_{r=1}^{\infty} H_r(G) = k \oplus G(G)$ とおくと, これに cocommutative Hopf algebra の構造が入ることは明らかである。

(II) G が commutative であるための必要十分条件は, $H(G)$ が commutative algebra になることである。

§4. Purely inseparable isogenies

G, G' を k で定義された群多様体, α を $G \rightarrow G'$ の isogeny とする。このとき, $L = k(G')$ は $K = k(G)$ の部分体と同一視出来る, $A_\alpha = \text{Hom}_L(K, k)$ とおき, $N(\alpha) \in A_\alpha$ の元 u で $uL_\alpha^* = L_\alpha^*u$ が G のすべての k -有理点 a に対してなりたつ

ものからなる k -subalgebra とする。このとき, $N(\alpha)^+ = \{u \in N(\alpha) \mid u(1) = 0\}$ とおくとき, $L = \{f \in K \mid u(f) = 0 \text{ for } u \in N(\alpha)^+\}$ となり, かつ $N(\alpha) = k \oplus N(\alpha)^+$ で k 上の Hopf algebra となることから Cartier によって知られている。特に α が purely inseparable isogeny のとき, この $N(\alpha)$ は上で述べた $H(G)$ の Hopf subalgebra になることが分る。更に $a \in G$ の k -有理点とすると, R_a を $R_a(x) = xa$ なる $G \rightarrow G$ の k -morphism とする。 $u \in \text{Hom}_k(K, K)$ に対し, $\text{ad}_a(u) = R_a^{*-1} u R_a^*$ とおき, ad を G の adjoint 表現という。このとき 次の定理を得る。

Theorem 1. $G \in k$ で定義された群多様体とあるとき, G の purely inseparable isogeny $\alpha: G \rightarrow G'$ と, $H(G)$ の adjoint 表現で不変な有限次元の Hopf subalgebra は (2.1) に対応する。

α を $G \rightarrow G'$ の purely inseparable isogeny とし, $N(\alpha)$ をその対応する $H(G)$ の Hopf subalgebra とする。 $N(\alpha)$ は有限次元の cocommutative Hopf algebra であるから, その linear dual $N(\alpha)^D$ は commutative Hopf algebra になり, $\text{Spec}(N(\alpha)^D)$ は finite group k -scheme の構造をもつ。

一方, e' を G' の単位元, m' を $\mathcal{O}_{e', G'}$ の極大イデアル
 とするとき, $\mathcal{O} = \alpha^*(m') \mathcal{O}_{e, G}$ とおくと, $R = \mathcal{O}_{e, G} / \mathcal{O}$
 は Artin local ring となる。そして, $N(\alpha)^D$ と R は k -
 algebra として同型であることが示される。又 $N(\alpha)^D$ の co-
 algebra としての構造は G の group multiplication から導
 かれることが分る。更に, この $\text{Spec}(N(\alpha)^D)$ が $\alpha: G \rightarrow G'$ の
 核とみなされることが分る。

§5. Purely inseparable isogeny と modular 拡大.

G, G', α 等は §4 と同じとする。 $L = k(G')$ と $K = k(G)$
 の部分体と同一視しておく。このとき, Hopf algebra $N(\alpha)$
 に対して, $w: N(\alpha) \otimes_k K \rightarrow K$ と $w(u \otimes f) = u(f)$ によ
 って定義すると, w は Sweedler の意味で $k(G)$ から $k(G)$ に
 measure してゐる。このことから K/L は modular 拡大
 であることが分る。一方, 代数函数体の modular 拡大につ
 いて次の結果が得られる。

Proposition 5. k を完全体, L を k 上の代数函数体
 とし, K は L の purely inseparable modular 拡大とする。 $K =$
 $L(x_1) \otimes_L \cdots \otimes_L L(x_s)$, $[L(x_i):L] = p^{e_i}$ ならば, L の元

t_{s+1}, \dots, t_n があって, $\{x_1, \dots, x_s, t_{s+1}, \dots, t_n\}$ が K/k の分離超越基, $\{x_1^{p^{e_1}}, \dots, x_s^{p^{e_s}}, t_{s+1}, \dots, t_n\}$ が L/k の分離超越基となる.

このことから, 次の結果が容易に分る.

Theorem 2. k を代数的閉体とし, $G, G' \in k$ で定義された群多様体, $\alpha \in G \rightarrow G'$ の purely inseparable isogeny で k 上で定義されているとする. このとき, $\theta_{e, G}$ の適当な正則パラメータ系 $\{t_1, \dots, t_n\} \in$ とれば, $\{t_1^{p^{e_1}}, \dots, t_s^{p^{e_s}}, t_{s+1}, \dots, t_n\}$ が $\theta_{e', G'}$ の正則パラメータ系となる.

そして, $[k(G) : k(G)] = p^{e_1 + \dots + e_s}$. 又, $N(\alpha)^D$ は k -algebra として, $k[x_1, \dots, x_s] / (x_1^{p^{e_1}}, \dots, x_s^{p^{e_s}})$ と同型になる.

References

- [1] H. Yanagihara, "On the structure of bialgebras attached to group varieties", to appear in J. Sci. Hiroshima Univ. Ser. A-I.
- [2] K. Kosaki and H. Yanagihara, "On purely inseparable extensions of algebraic function fields", to appear in ibid.